13ο μάθημα
20/4/18

ΓΕΝΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ: Έστω $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_{k+1}}\}$: Γ.Α.
Θδο το σύνολο διανυσμάτων $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \dots, \vec{y_{k+1}}\}$: ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων, όπου $\vec{y_r}$ ορίζεται από τη σχέση (∗) για κάθε $r = 1, 2, \dots, k+1$.

Επειδή το σύνολο $\{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_k}\}$: είναι Γ.Α. ως υποσύνολο Γ.Α. συνόλου από την Επαγωγική Υπόθεση έχουμε το ορθογώνιο σύνολο από μη-μηδενικά διανύσματα $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \dots, \vec{y_k}\}$.
Άρα μένει να δείξουμε ότι:

- $\vec{y_{k+1}} \neq \vec{0}$ και
- $\vec{y_{k+1}} \perp \vec{y_1}$, $\vec{y_{k+1}} \perp y_2, \dots, \vec{y_{k+1}} \perp \vec{y_k}$

$\vec{y_{k+1}} = \vec{x_{k+1}} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_{k+1}}) - \dots - \Pi_{\vec{y_k}}(\vec{x_{k+1}})$

Αν $\vec{y_{k+1}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x_{k+1}} = \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_{k+1}}) + \dots + \Pi_{\vec{y_k}}(\vec{x_{k+1}})$

- $\Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_{k+1}})$: γραμμικός συνδυασμός του $\vec{y_1} = \vec{x_1}$
- $\Pi_{\vec{y_2}}(x_{k+1})$: —//— $\vec{x_1}, \vec{x_2}$

⋮

- $\Pi_{\vec{y_k}}(\vec{x_{k+1}})$: —//— $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_k}$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Το $\vec{x_{k+1}}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_k}$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το σύνολο $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_{k+1}}\}$: Γ.Α.
Άρα: $\vec{y_{k+1}} \neq \vec{0}$

$$\langle \vec{y_{k+1}}, \vec{y_1} \rangle = \langle \vec{x_{k+1}}, \vec{x_1} \rangle - \langle \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_{k+1}}), \vec{y_1} \rangle - \dots - \langle \Pi_{\vec{y_k}}(x_{k+1}), \vec{y_1} \rangle =$$
$$= \langle \vec{x_{k+1}}, \vec{y_1} \rangle - \left\langle \frac{\langle \vec{x_{k+1}}, \vec{y_1} \rangle}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \cdot \vec{y_1}, \vec{y_1} \right\rangle - \dots - \left\langle \frac{\langle \vec{x_{k+1}}, \vec{y_k} \rangle}{\langle \vec{y_k}, \vec{y_k} \rangle} \vec{y_k}, \vec{y_1} \right\rangle$$

Επειδή το $\langle \vec{y_1}, \dots, \vec{y_k} \rangle$: ορθογώνιο $\Rightarrow$
$\Rightarrow \langle \Pi_{\vec{y_i}}(\vec{x_{k+1}}), \vec{y_1} \rangle = 0$, $1 \leq i \leq k$
↳ βαθμωτό πολλαπλάσιο του $\vec{y_i}$.

$\Rightarrow$

Άρα: $\langle \vec{y}_{k+1}, \vec{y}_1 \rangle = 0 \Rightarrow \vec{y}_{k+1} \perp \vec{y}_1$

$\vdots$

$\langle \vec{y}_{k+1}, \vec{y}_k \rangle = \langle \vec{x}_{k+1}, \vec{y}_k \rangle - \cancel{\langle \Pi_{\vec{y}_1}(x_{k+1}), \vec{y}_k \rangle} - \dots - \langle \Pi_{\vec{y}_k}(\vec{x}_{k+1}), \vec{y}_k \rangle$

$= \langle \vec{x}_{k+1}, \vec{y}_k \rangle - \left\langle \dfrac{\langle \vec{x}_{k+1}, \vec{y}_k \rangle}{\langle \vec{y}_k, \vec{y}_k \rangle} y_k, y_k \right\rangle =$

$= \langle \vec{x}_{k+1}, \vec{y}_k \rangle - \dfrac{\langle \vec{x}_{k+1}, \vec{y}_k \rangle}{\cancel{\langle \vec{y}_k, \vec{y}_k \rangle}} \cdot \cancel{\langle \vec{y}_k, \vec{y}_k \rangle} = 0$

Άρα: $\langle \vec{y}_{k+1}, \vec{y}_k \rangle = 0 \Rightarrow \vec{y}_{k+1} \perp \vec{y}_k$

Άρα: $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{k+1}\}$: ορθογώνιο σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων.

Επειδή: ορθογώνια σύνολο μη-μηδενικών διανυσμάτων είναι Γ.Α. $\Rightarrow \{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_{k+1}\}$: ορθογώνιο σύνολο το οποίο είναι Γ.Α.

ΠΟΡΙΣΜΑ: Αν $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$: βάση του Ευκλείδειου χώρου $(E, \langle , \rangle)$, τότε το σύνολο $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n\}$: ορθογώνια βάση του E.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Μια βάση $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ σε έναν Ευκλείδειο χώρο $(E, \langle , \rangle)$ καλείται ορθοκανονική βάση (ΟΚΒ) $\Leftrightarrow \langle \vec{e}_i, \vec{e}_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$, $1 \le i, j \le n$

ΘΕΩΡΗΜΑ: κάθε Ευκλείδειος Χώρος $(E, \langle , \rangle)$, πεπερασμένης διάστασης, έχει μια ΟκΒ.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Αν $\{\vec{x_1}, \dots, \vec{x_n}\}$: βάση του E, τότε από το ΠΟΡΙΣΜΑ έπεται ότι υπάρχει μια ορθογώνια βάση $\{\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n}\}$.

Θέτοντας: $\vec{e_i} = \dfrac{\vec{y_i}}{\|\vec{y_i}\|}$, $1 \leq i \leq n$, έπεται άμεσα ότι το σύνολο $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ ΟκΒ του E.

ΕΡΩΤΗΣΗ: Αν $\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}\}$: ΟκΒ του $(E, \langle , \rangle)$. Τότε η ΟκΒ $\{\vec{y_1}, \dots, \vec{y_n}\}$ της διαδικασίας G-S είναι η αρχική

$\vec{y_1} = \vec{x_1}$

$\vec{y_2} = \vec{x_2} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2}) = \vec{x_2} - \dfrac{\cancel{\langle \vec{x_2}, \vec{y_1} \rangle}^{0}}{\langle \vec{y_1}, \vec{y_1} \rangle} \cdot \vec{y_1} = \vec{x_2}$

$\vec{y_3} = \vec{x_3} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_3}) - \Pi_{\vec{y_2}}(\vec{x_3}) = \vec{x_3} - \dfrac{\cancel{\langle \vec{x_3}, \vec{x_1} \rangle}^{0}}{\langle \vec{x_1}, \vec{x_1} \rangle} \cdot \vec{x_1} - \dfrac{\cancel{\langle \vec{x_3}, \vec{x_2} \rangle}^{0}}{\langle \vec{x_2}, \vec{x_2} \rangle} \vec{x_2} =$

$= \vec{x_3}$

$\vdots$

$\vec{y_n} = \vec{x_n}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1: Η κανονική βάση $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι ΟκΒ.

2 Έστω $\{\vec{x_1} = (1,2,3), \vec{x_2} = (1,0,-1), \vec{x_3} = (0,1,3)\}$: βάση του $\mathbb{R}^3$ η οποία δεν είναι ΟκΒ, διότι

π.χ. $\langle \vec{x_1}, \vec{x_2} \rangle = 1 + 3(-1) = -2 \neq 0$

$\vec{y_1} = \vec{x_1}$

$\vec{y_2} = \vec{x_2} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2}) = (1,0,-1) - \dfrac{\langle (1,0,-1), (1,2,3) \rangle}{\langle (1,2,3), (1,2,3) \rangle} \cdot (1,2,3) =$

$= (1,0,-1) - \dfrac{-2}{14}(1,2,3) = \left(\dfrac{8}{7}, \dfrac{2}{7}, -\dfrac{4}{7}\right)$

$\Rightarrow$

$$y_3 = \vec{x_3} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_3}) - \Pi_{\vec{y_2}}(\vec{x_3}) = (0,1,3) - \frac{\langle (0,1,3),(1,2,3)\rangle}{\langle (1,2,3),(1,2,3)\rangle}(1,2,3) -$$

$$- \frac{\langle (0,1,3), \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{4}{7}\right)\rangle}{\langle \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{4}{7}\right), \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{4}{7}\right)\rangle} \cdot \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{4}{7}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

Άρα $\{\vec{y_1}, \vec{y_2}, \vec{y_3}\}$: ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}^3$

$$\|\vec{y_1}\| = \sqrt{14}, \quad \|\vec{y_2}\| = \sqrt{\frac{12}{7}}, \quad \|\vec{y_3}\| = \sqrt{\frac{1}{6}}$$

Τότε το σύνολο $\left\{ \frac{\vec{y_1}}{\|\vec{y_1}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3), \frac{\vec{y_2}}{\|\vec{y_2}\|} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{12}}\left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, \frac{-4}{7}\right) \right.$

$\left. , \frac{\vec{y_3}}{\|\vec{y_3}\|} = \sqrt{6}\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) \right\}$

3) Στον $\mathbb{R}_2[t]$ θεωρούμε την κανονική βάση $\{\vec{x_1} = 1, \vec{x_2} = t, \vec{x_3} = t^2\}$. Ο $\mathbb{R}_2[t]$ είναι Ευκλείδειος χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle P(t), Q(t)\rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$

Η παραπάνω βάση δεν είναι ΟΚΒ, διότι:

$$\langle 1, t\rangle = \int_0^1 1\cdot t\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2} \neq 0$$

Θα την κάνουμε ΟΚΒ με διαδικασία G - S

- $\vec{y_1} = \vec{x_1} = 1$
- $\vec{y_2} = \vec{x_2} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_2}) = t - \frac{\langle t, 1\rangle}{\langle 1, 1\rangle}\cdot 1 = t - \frac{\int_0^1 t\cdot 1\,dt}{\int_0^1 1\cdot 1\,dt}\cdot 1 =$

$= t - \frac{1/2}{1} \cdot 1 = t - \frac{1}{2}$

• $\vec{y_3} = \vec{x_3} - \Pi_{\vec{y_1}}(\vec{x_3}) - \Pi_{\vec{y_2}}(\vec{x_3}) = t^2 - \frac{\langle t^2, 1\rangle}{\langle 1,1\rangle} \cdot 1 - \frac{\langle t^2, t-1/2\rangle}{\langle t-\frac{1}{2}, t-1/2\rangle}\left(t-\frac{1}{2}\right)$

$= \dots = t^2 - t + \frac{1}{6}$

Άρα: $\{\vec{y_1} = 1, \vec{y_2} = t - \frac{1}{2}, \vec{y_3} = t^2 - t + \frac{1}{6}\}$: ορθογώνια βάση του $\mathbb{R}_2[t]$

$\|1\| = 1$

$\|t - 1/2\| = \frac{1}{\sqrt{12}}$

$\|t^2 - t + \frac{1}{6}\| = \frac{1}{\sqrt{180}}$

Άρα το σύνολο:

$\{1, \sqrt{12}\cdot\left(t - \frac{1}{2}\right), \sqrt{180}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\}$

είναι ΟΚΒ του $\mathbb{R}_2[t]$

ΓΙΑΤΙ ΕΙΝΑΙ ΧΡΗΣΙΜΟ ΝΑ ΔΟΥΛΕΥΟΥΜΕ ΜΕ ΟΚΒ

→ Έστω $(E, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος Χώρος και $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}\}$ είναι μια ΟΚΒ του E.
Τότε $\forall \vec{x} \in E$: $\vec{x} = x_1 \cdot \vec{e_1} + x_2 \cdot \vec{e_2} + \dots + x_n \vec{e_n}$, όπου $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \le i \le n$

Τότε: $\forall i = 1, \dots, n$: $\langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle = \langle x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}, \vec{e_i} \rangle =$

$= x_1 \cancel{\langle \vec{e_1}, \vec{e_i} \rangle}^{0} + \dots + x_i \cancel{\langle \vec{e_i}, \vec{e_i} \rangle}^{1} + \dots + x_n \cancel{\langle \vec{e_n}, \vec{e_i} \rangle}^{0} = x_i$

διότι:

$$\langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = j \\ 0, & \text{αν } i \neq j \end{cases}$$

Άρα: $\boxed{\vec{x} = \langle \vec{x}, \vec{e_1} \rangle \vec{e_1} + \langle \vec{x}, \vec{e_2} \rangle \vec{e_2} + \dots + \langle \vec{x}, \vec{e_n} \rangle \vec{e_n}}$

$\langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle = \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{e_i}\| \cos(\theta_i)$, όπου θ_i: η γωνία των $\vec{x}, \vec{e_i}$, $1 \le i \le n$

⟶

$\Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{e_i} \rangle = \|\vec{x}\| \cos(\theta_i)$ $\boxed{\vec{x} = \|\vec{x}\|\cos(\theta_1)\vec{e_1} + \dots + \|\vec{x}\|\cos(\theta_n)\vec{e_n}}$

$1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow$ Αν $\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \vec{e_n}$ και $\vec{y} = y_1\vec{e_1} + \dots + y_n\vec{e_n}$

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i , \sum_{j=1}^{n} y_j e_j \rangle =$

$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \delta_{ij} =$

$= x_1y_1 + \dots + x_ny_n$

Άρα: $\boxed{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{e_1} \rangle \cdot \langle \vec{y}, \vec{e_1} \rangle + \dots + \langle \vec{x}, \vec{e_n} \rangle \langle \vec{y}, \vec{e_n} \rangle}$

$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = \langle \vec{x}, \vec{e_1} \rangle^2 + \dots + \langle \vec{x}, \vec{e_n} \rangle^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{e_1} \rangle^2 + \dots + \langle \vec{x}, \vec{e_n} \rangle^2}}$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $(E, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος Χώρος και V ένας υπόχωρος του E. Αν $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty$, τότε: ο V είναι Ευκλείδειος Χώρος και έχει μια ΟΚΒ

ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Προφανώς η απεικόνιση $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ είναι ένα Εσωτερικό γινόμενο στον V και άρα το ζεύγος $(V, \langle , \rangle)$: Ευκλείδειος Χώρος. Αν $\dim_{\mathbb{R}} E < \infty \Rightarrow \dim_{\mathbb{R}} V < \infty$, και άρα σύμφωνα με το προηγούμενο Θεώρημα ο V έχει μια ΟΚΒ

Έστω $(E, \langle , \rangle)$: Ευκλείδειος Χώρος και V: υπόχωρος του E.

Θεωρούμε το σύνολο:

$$V^{\perp} = \{ \vec{x} \in E \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0, \forall \vec{y} \in V \}$$

$\Rightarrow$

Το υποσύνολο $V^{\perp} = \{\vec{x} \in E \mid \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0,\ \forall \vec{y} \in V\}$

Το υποσύνολο $V^{\perp}$ είναι υπόχωρος του E, διότι:

- Επειδή $\langle \vec{0}, \vec{x} \rangle = 0,\ \forall \vec{x} \in E \Rightarrow \langle \vec{0}, \vec{y} \rangle = \vec{0}$, $\forall \vec{y} \in V \Rightarrow \vec{0} \in V^{\perp}$
- Έστω $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in V^{\perp} \Rightarrow \langle \vec{x_1}, \vec{y} \rangle = 0 = \langle \vec{x_2}, \vec{y} \rangle,\ \forall \vec{y} \in V$.

Τότε: $\forall \vec{y} \in V$: $\langle \vec{x_1} + \vec{x_2}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x_1}, \vec{y} \rangle + \langle \vec{x_2}, \vec{y} \rangle = 0 + 0 = 0$

Άρα: $\vec{x_1} + \vec{x_2} \in V^{\perp}$

- Έστω $\vec{x} \in V^{\perp} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0,\ \forall \vec{y} \in V \Rightarrow \langle \lambda \vec{x}, \vec{y} \rangle =$
$= \lambda \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \lambda \cdot 0 = 0$ $\Big| \Rightarrow \lambda \vec{x} \in V^{\perp}$
$\lambda \in \mathbb{R}$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Ο υπόχωρος $V^{\perp}$ καλείται <u>ορθογώνιο συμπλήρωμα</u> του V.

<u>ΛΗΜΜΑ</u>: Έστω V: υπόχωρος του Ευκλείδειου Χώρου $(E, \langle , \rangle)$ και $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_k}\}$: ΟΚΒ του V. Τότε:
$\forall \vec{x} \in E$: $\vec{x} \in V^{\perp} \Leftrightarrow \langle \vec{x}, \vec{e_1} \rangle = \dots = \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle = 0$

<u>ΑΠΟΔΕΙΞΗ</u>: "$\Rightarrow$" Έστω $\vec{x} \in V^{\perp} \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$,
$\forall \vec{y} \in V \Rightarrow \langle \vec{x}, \vec{e_1} \rangle = \dots = \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle = 0$, διότι:
$\vec{e_1}, \dots, \vec{e_k} \in V$

"$\Leftarrow$" Έστω ότι: $\langle \vec{x}, \vec{e_1} \rangle = \dots = \langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle = 0$. Έστω $\vec{y} \in V$
τότε: $\vec{y} = y_1 \cdot \vec{e_1} + \dots + y_k \vec{e_k}$ και επομένως:
$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{x}, y_1 \vec{e_1} + \dots + y_k \vec{e_k} \rangle = y_1 \overset{0}{\cancel{\langle \vec{x}, \vec{e_1} \rangle}} + \dots + y_k \overset{0}{\cancel{\langle \vec{x}, \vec{e_k} \rangle}} = 0$
Άρα $\vec{x} \in V^{\perp}$

~~ΘΕ~~

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $(E, <,>)$ είναι ένας Ευκλείδειος χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε για κάθε υπόχωρο V του E: $\boxed{E = V \oplus V^{\perp}}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ:

Έστω $\vec{x} \in E$. Ζητάμε $\vec{y} \in V$ και $\vec{z} \in V^{\perp}$: $\vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$

Ισοδύναμα, ζητάμε: $\vec{y} \in V$: $\vec{x} - \vec{y} \in V^{\perp}$, δηλαδή ζητάμε $\vec{y} \in V$ έτσι ώστε: $<\vec{x} - \vec{y}, \vec{w}> = 0, \forall \vec{w} \in V$

Έστω $B = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_k}\}$: ΟΚΒ του V

Άρα: ζητάμε $\vec{y} \in V$: $<\vec{x} - \vec{y}, \vec{e_1}> = \dots = <\vec{x} - \vec{y}, \vec{e_k}> = 0$

Ισοδύναμα θα έχουμε: $<\vec{x}, \vec{e_i}> = <\vec{y}, \vec{e_i}>, \forall i = 1, \dots, k$

Όμως $\vec{y} \in V \Rightarrow \vec{y} = <\vec{y}, \vec{e_1}>\vec{e_1} + \dots + <\vec{y}, \vec{e_k}>\vec{e_k} =$
$= <\vec{x}, \vec{e_1}>\vec{e_1} + \dots + <\vec{x}, \vec{e_k}>\vec{e_k}$

Άρα θέτοντας: $\vec{y} = <\vec{x}, \vec{e_1}>\vec{e_1} + \dots + <\vec{x}, \vec{e_k}>\vec{e_k}$ έπεται ότι: $\vec{y} \in V$
$\vec{x} - \vec{y} \in V^{\perp}$

Άρα: $\underbrace{\vec{x}}_{} = \underbrace{\vec{y}}_{\in V} + \underbrace{(\vec{x} - \vec{y})}_{\in V^{\perp}}$ Επομένως: $E = V + V^{\perp}$ (1)

Αν $\vec{x} \in V \cap V^{\perp} \Rightarrow \vec{x} \in V$ και $<\vec{x}, \vec{y}> = 0, \forall \vec{y} \in V$
$\Rightarrow <\vec{x}, \vec{x}> = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$. Άρα $V \cap V^{\perp} = \{0\}$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow E = V \oplus V^{\perp}$

ΠΟΡΙΣΜΑ: $\dim_{\mathbb{R}} V^{\perp} = \dim_{\mathbb{R}} E - \dim_{\mathbb{R}} V$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο υπόχωροι V, W του Ευκλείδειου χώρου $(E, \langle , \rangle)$ καλούνται ορθογώνιοι $\Leftrightarrow$ $\forall \vec{y} \in V$: $\langle \vec{y}, \vec{w} \rangle = 0$ και τότε θα $\forall \vec{w} \in W$ γράφουμε: $V \perp W$

Αν $E = V \oplus W$, τότε το ευθύ άθροισμα $V \oplus W$ καλείται ορθογώνιο ευθύ άθροισμα, αν $V \perp W$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Για κάθε υπόχωρο V του E: $V \perp V^{\perp}$ και το ευθύ άθροισμα $E = V \oplus V^{\perp}$ ορθογώνιο ευθύ άθροισμα.

Έστω V: μη-μηδενικός υπόχωρος του Ευκλείδειου χώρου $(E, \langle , \rangle)$. Επειδή $E = V \oplus V^{\perp} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \vec{x} \in E : \vec{x} = \vec{y} + \vec{z}$, όπου $\vec{y} \in V$ κ' $\vec{z} \in V^{\perp}$ (μοναδική γραφή)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το διάνυσμα $\vec{y}$ στην παραπάνω σχέση καλείται η ορθογώνια προβολή του $\vec{x}$ στο V

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΥΡΕΣΗΣ ΟΡΘΟΓΩΝΙΑΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΣΕ ΥΠΟΧΩΡΟ: Έστω $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k\}$: ΟΚΒ του V. Θέτουμε: $\vec{y} = \langle \vec{x}, \vec{e}_1 \rangle \vec{e}_1 + \ldots + \langle \vec{x}, \vec{e}_k \rangle \vec{e}_k$: ορθογώνια προβολή του $\vec{x}$ στον V

Αν $V = \{k \cdot \vec{y} \in E \mid k \in \mathbb{R}\}$, $\vec{y} \neq \vec{0}$
Τότε η ορθογώνια προβολή του $\vec{x} \in E$ στον V είναι: $\Pi_{\vec{y}}(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle}{\langle \vec{y}, \vec{y} \rangle} \vec{y}$